



IMPLEMENTATIE NOTA

Een numerieke berekening van de verandering van de grondwaterstand door permanente onttrekkingen in vrij afwaterende gebieden in opdracht van LTO Nederland.

Colofon**Titel****IMPLEMENTATIE NOTA**

Een numerieke berekening van de verandering van de grondwaterstand door permanente onttrekkingen in vrij afwaterende gebieden

Opdrachtgever

LTO Nederland

Auteur

Prof. Dr. Ir. Cees van den Akker
Emeritus hoogleraar Hydrologie Technische Universiteit Delft
en hydrologisch adviseur van LTO Nederland
cvandenakker@casema.nl

Verzonden aan

Deze nota is selectief verspreid onder drinkwatermaatschappijen, Vewin, ACSG, IPO en de regionale LTO organisaties.

Den Haag, 1 juni 2018

SAMENVATTING

In de LTO nota van december 2016 getiteld “Analyse van de stationaire grondwaterstroming naar permanente putten in vrij afwaterende gebieden” is op analytische wijze een vergelijking afgeleid voor radiaal symmetrische stroming naar een put waaruit grondwater wordt onttrokken. In werkelijkheid is er door lokale en regionale verschillen in bodemopbouw en drainage systeem geen sprake van radiaal symmetrie.

In deze nota is beschreven hoe de vergelijking uit de LTO nota kan worden omgewerkt naar een vergelijking die gebruikt kan worden in een numeriek regionaal grondwatermodel. Het resultaat is een partiële tweede orde differentiaal vergelijking voor stationaire grondwater stroming. In deze nota is aangesloten bij de berekeningsmethodiek die wordt gehanteerd door de ACSG voor de vaststelling van opbrengstdepressies als gevolg van grondwater winningen, de zogenoemde gangbare methodiek. In deze methodiek dient de verandering van de freatische grondwaterstand bekend te zijn in termen van verandering van de gemiddelde hoogste grondwaterstand (GHG) en de gemiddeld laagste grondwaterstand (GLG).

Het te modelleren gebied wordt opgedeeld in schadevlakken waarbinnen de van belang zijnde eigenschappen homogeen worden verondersteld.

De relatie tussen de grondwaterstand en het oppervlaktewatersysteem binnen een schadevlak kan op drie manieren worden gekarakteriseerd:

- Een logaritmische relatie (U/h relatie) die als gemengde randvoorwaarde aan het freatisch vlak geldt
- Een Dirichlet randvoorwaarde, dit is een freatische grondwaterstand die niet wordt beïnvloed door een onttrekking (De Glee situatie)
- Een Neuman randvoorwaarde, hierbij is de voeding van het watervoerende pakket constant (Dupuit situatie)

In de bijlage van deze nota is de fysisch mathematische uitwerking gegeven.

De afgeleide relaties kunnen worden geïmplementeerd in bestaande computercodes bijvoorbeeld Modflow.

1. INLEIDING

In december 2016 is een LTO nota verschenen getiteld “Analyse van de stationaire grondwaterstroming naar permanente putten in vrij afwaterende gebieden”.

In deze nota is op analytische wijze, uitgaande van de bewegingsvergelijking (Wet van Darcy) en de volumebehoudswet (Waterbalans), een tweede orde gewone differentiaalvergelijking afgeleid. Deze differentiaalvergelijking geeft de relatie weer tussen de verandering van de grondwater stijghoogte en de afstand tot een permanente, constante onttrekking in een vrij afwaterend gebied.

De relatie tussen de grondwaterstand ten opzichte van maaiveld en de afvoer door het drainagesysteem (U/h relatie) wordt gekarakteriseerd met een logaritmisch verloop waarin een drietal hydrologische grootheden een rol spelen.

Op basis van de differentiaalvergelijking kunnen de verlagingen van de stijghoogte en de grondwaterstand worden berekend als gevolg van een permanente, constante onttrekking. De (geo)hydrologische situatie moet daarbij vergaand worden geschematiseerd. Zoals in de LTO nota is gesteld is in werkelijkheid uiteraard niet altijd sprake van een homogene bodemopbouw, kan de U/h relatie per deelgebied een andere zijn en kunnen de grondwatertrappen over het gebied verschillen. Voor de berekening van de verlaging van de grondwaterstijghoogte en de grondwaterstand ligt het daarmee voor de hand om een numerieke modelberekening uit te voeren, waarbij over het totale gebied de heterogeniteit kan worden meegenomen.

In het voorliggende rapport zal worden aangegeven hoe de afgeleide relaties uit de LTO nota van 2016 kunnen worden geïmplementeerd in een numeriek model.

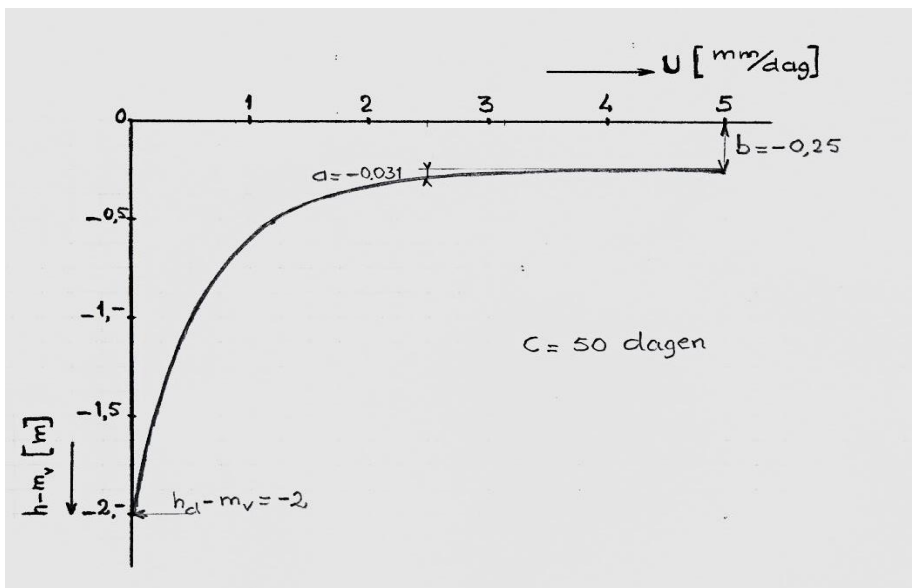
Het beoogde resultaat van de berekeningen met het numerieke model is de vaststelling van de verandering van de grondwaterstijghoogte en de verandering van de grondwaterstand in termen van de gemiddelde hoogste en laagste grondwaterstand (GHG en GLG) onder invloed van de permanente, constante onttrekking.

In de gangbare methodiek, zoals die wordt gebruikt door de ACSG, voor de berekening van opbrengstdepressies door grondwateronttrekkingen, is het noodzakelijk informatie te hebben over de mate van verandering van de GHG en de GLG (beide grootheden samen worden aangeduid met GxG) ten gevolge van de onttrekking.

Het ligt daarmee voor de hand om het resultaat van modelberekeningen aan het verzadigde grondwatersysteem te richten op het verkrijgen van informatie over de verandering van de GxG. Aangezien de GxG een grootheid is die wordt berekend in een proces van middeling in de tijd en bovendien wordt vastgesteld voor een gebied, is er voor gekozen om ook de grondwaterstand als een gebiedsgemiddelde grootheid in het rekenproces mee te nemen. Dit betekent dat ook de afvoer door het drainagesysteem als een afvoer per oppervlakte eenheid in de berekening is opgenomen.

2. KENMERKEN VAN EEN VRIJ AFWATEREND GEBIED

In deze nota zal een vrij afwaterend gebied worden beschouwd met een eenvoudige bodemopbouw. Een watervoerend pakket met een relatief hoog doorlaatvermogen wordt aan de onderkant begrensd door een ondoorlatende basis. Op dit pakket ligt een minder goed doorlatende laag die wordt gekarakteriseerd met een hydraulische weerstand. In deze toplaag zorgt een drainagesysteem met greppels, sloten en beken voor de afvoer van het gedraineerde grondwater. De afstand tussen bijvoorbeeld sloten is veelal één of enkele honderden meters. Er is een relatie tussen de gebiedsgemiddelde grondwaterstand ten opzichte van maaiveld $h - m_v$ en de afvoer U per oppervlakte eenheid door het drainagesysteem. Een voorbeeld van een dergelijke relatie is gegeven in figuur 1



FIGUUR 1

In vrij afwaterende gebieden vindt geen noemenswaardige infiltratie vanuit het oppervlaktewater naar het grondwatersysteem plaats. Er is dus vrijwel uitsluitend sprake van drainage. Vrij afwaterende gebieden kenmerken zich door een zekere gebiedshelling. De grondwaterstanden die voorkomen in een gebied met vrije afwatering worden gekarakteriseerd met grondwatertrappen. Dit is een indeling in klassen waarbij een gemiddelde hoogste grondwaterstand (GHG) en een gemiddeld laagste grondwaterstand (GLG) worden vastgesteld. Zo is de definitie voor de GHG: de grondwaterstand ten opzichte van maaiveld, die wordt berekend als gemiddelde van de drie hoogste gemeten waarnemingen (waarneming eenmaal per twee weken) per seizoen (van 1 oktober tot 1 april) over een periode van acht aaneengesloten jaren.

Op bijvoorbeeld bodemkaarten wordt voor aaneengesloten gebieden variërend van enkele tot tientallen hectares de vastgestelde grondwatertrap (Gt) vermeld. Dus naast een middeling in de tijd (3 waarnemingen per seizoen over een periode van 8 jaar) is er ook sprake van een ruimtelijke middeling op basis van de klassenindeling. Ter illustratie is hieronder de Van der Sluijs tabel weergegeven waarop de verschillende grondwatertrappen staan vermeld.

Van der Sluijs tabel			Gemiddelde
Gt	GHG	GLG	GWS
I	-5	38	17
II	7	66	37
II*	32	67	50
III	17	103	60
III*	32	102	67
IV	56	104	80
V	17	135	76
V*	32	142	87
VI	61	155	108
VII	101	190	146
VIII	185	281	233

In deze tabel, die vrij algemeen wordt gebruikt voor de indeling in grondwatertrappen, staat in centimeters de diepte onder maaiveld aangegeven van de GHG en de GLG. Ook de gemiddelde grondwaterstand (GWS) wordt vermeld.

3. BEREKENING VAN DE VERDAMPINGSREDUCTIE T.G.V. EEN ONTTREKKING

Ten behoeve van de berekening van de verdampingsreductie als gevolg van een onttrekking uit het watervoerende pakket is een heel scala aan gegevens (bodemkarakteristieken en bodemgegevens) noodzakelijk ter zake van de onverzadigde zone zoals bijvoorbeeld pF-curves, dikte van de wortelzone en de z-afstand. De voorliggende implementatie nota richt zich uitsluitend op de effecten van winningen in het verzadigde grondwatersysteem.

Een noodzakelijk basisgegeven met betrekking tot de verzadigde zone voor de berekening van de verdampingsreductie is de verlaging van de grondwaterstand en meer specifiek de verlaging van de GHG en de GLG. De berekeningsmethodiek is zo opgezet dat gewerkt kan worden met schadevlakken. Een schadevlak kan worden gezien als een aaneengesloten oppervlak waarbinnen de hydrologische eigenschappen, bodemconstanten, bodemkarakteristieken en grondwatertrappen als homogeen worden beschouwd.

Teneinde de verdampingsreductie te kunnen vaststellen dient per schadevlak de verandering van de GVG (gemiddelde voorjaarsgrondwaterstand) en GLG bekend te zijn. De GVG is de gemiddelde grondwaterstand aan het begin van het groeiseizoen op 1 april. De GVG wordt berekend uit de waarde van de GHG en de GLG. Bijvoorbeeld voor stroomgebieden is afgeleid dat geldt (zie Bouwmans 1990):

$$GVG = 0,97 \text{ GHG} + 0,15 (\text{GLG} - \text{GHG}) + 4 \quad [\text{cm}]$$

Er worden echter ook andere rekenregels voor de bepaling van de GVG aangehouden. Ook de datum waarop deze GVG wordt berekend kan verschillen. In nota's van het vroegere ICW werd ook wel 14 april aangehouden. De huidige berekeningsmethodiek voor de bepaling van de GVG en de datum waarop deze geldt, is opgenomen in de gangbare methodiek van de ACSG.

In de voorliggende nota wordt op basis van de LTO nota uit 2016 aangegeven hoe de tweede orde gewone differentiaalvergelijking voor de stationaire grondwaterstroming naar permanente putten in vrij afwaterende gebieden kan worden geïmplementeerd in een numeriek grondwatermodel. Met het grondwatermodel kunnen de veranderingen van de GHG en de GLG worden berekend die het gevolg zijn van een permanente, constante onttrekking.

4. HYDROLOGISCHE UITGANGSPUNTEN EN AANNAMES

In de numerieke berekening wordt het verzadigde grondwatersysteem geschematiseerd tot een watervoerend pakket met daarop een minder goed doorlatende laag.

De grondwaterstroming in het watervoerende pakket wordt horizontaal aangenomen en de stroming in de afdeklaag verticaal. De grondwaterstand in de afdeklaag wordt gebiedsgemiddeld en de afvoer door het drainagesysteem wordt per oppervlakte eenheid in de berekening meegenomen. Het resultaat van de numerieke berekening is de verandering van de stijghoogte en de freatische grondwaterstand ten gevolge van een permanente, constante onttrekking.

Het gebied wordt opgedeeld in vlakken (schadevlakken) waarbinnen de hydrologische kenmerken met betrekking tot grondwatertrappen, grondwaterstand/afvoerrelaties en bodemconstanten homogeen en bekend zijn.

Aangenomen wordt dat de GHG in het gehele modelgebied op hetzelfde tijdstip wordt bereikt. Hetzelfde geldt voor de GLG.

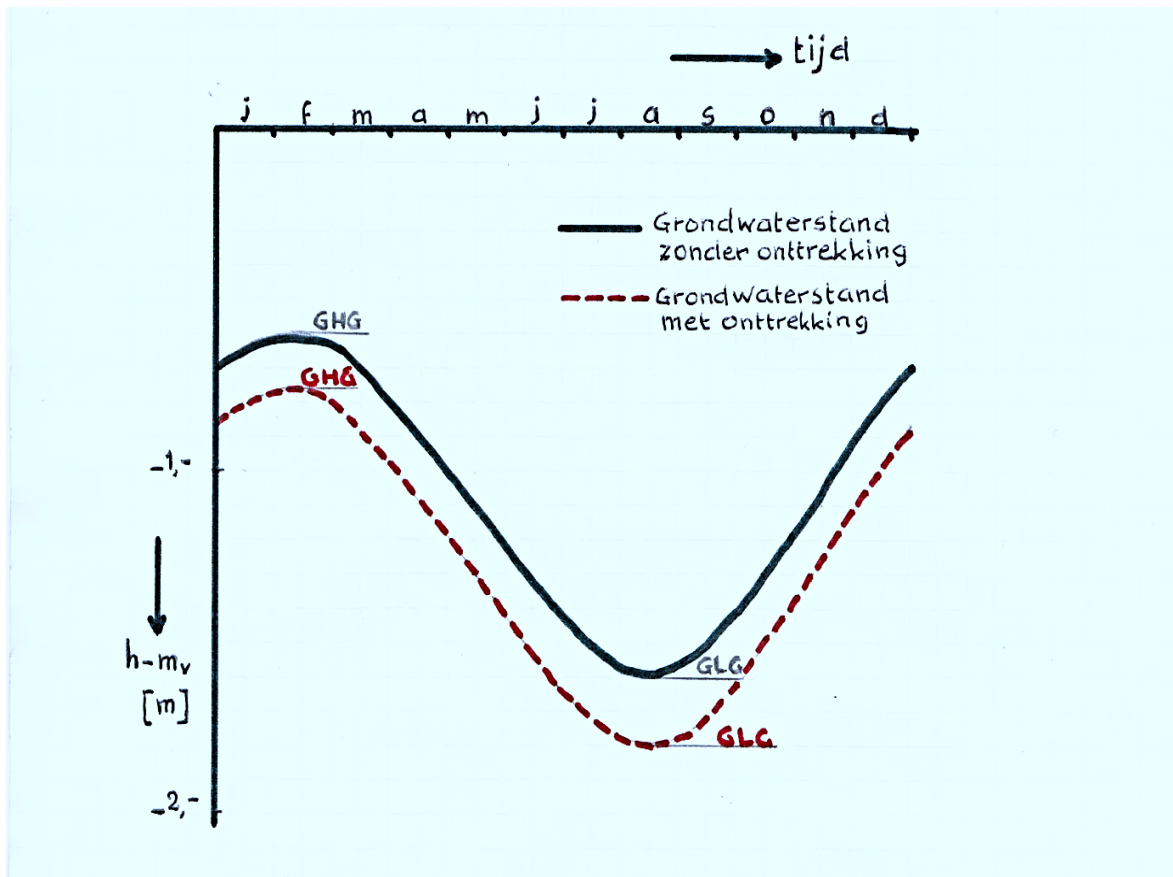
In de numerieke berekening wordt vastgesteld wat het effect is van een permanente, constante grondwateronttrekking op de GHG en GLG in elk schadevlak. Er wordt dus berekend wat de verandering is van zowel GHG en GLG. Zoals in het vorige hoofdstuk is gesteld moeten de veranderingen van GHG en GLG bekend zijn om een verdampingsreductie te berekenen en vervolgens een opbrengstdepressie.

In figuur 2 is schematisch aangegeven hoe het gemiddelde grondwaterstandsverloop is gedurende het jaar uitgaande van de GHG en GLG met en zonder de onttrekking.

Gezien het niet-lineaire karakter van de U/h relatie mag men verwachten dat de verandering van de GHG minder zal zijn dan die van de GLG.

Het is wellicht goed te benadrukken dat het verloop van de grondwaterstand zoals dat is gepresenteerd in figuur 2 niet een werkelijk gemeten verloop betreft. Het verloop van de grondwaterstand gedurende het jaar in de figuur is het rekenresultaat van het nemen van gemiddelden gedurende het seizoen en een gemiddelde over een periode van 8 jaar. Het algoritme dat aan de vaststelling van dit verloop ten grondslag ligt is echter wel een essentieel element in de berekening van de verlaging van de GHG en de GLG ten behoeve van de toepassing van de gangbare methodiek door de ACSG.

In het verloop van de grondwaterstand in figuur 2 worden de hoogste en laagste stand gekarakteriseerd als GHG respectievelijk GLG. In dit hoogste en laagste punt is wiskundig gezien de eerste afgeleide naar de tijd van het verloop van de grondwaterstand gelijk aan nul.



FIGUUR 2

We kunnen dus stellen dat op het moment dat de GHG en GLG worden bereikt de verandering van de grondwaterstand in de tijd gelijk is aan nul (horizontale raaklijn) dus:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

We nemen aan dat eveneens :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

op het tijdstip dat de GHG en GLG worden bereikt.

Er komt op het moment dat de GxG wordt bereikt dus geen water vrij uit berging en er gaat geen water in berging. Dit geldt zowel voor de situatie zonder onttrekking als de situatie met de constante onttrekking. Hieruit volgt dat de termen die het niet-stationaire gedrag bepalen wegvallen. Dit betekent dat voor het vaststellen van de veranderingen van GHG en GLG volstaan kan worden met een stationaire berekening.

Er kan dus worden gesteld dat een permanente, constante onttrekking van grondwater uitsluitend wordt gecompenseerd door een verminderde oppervlaktewater afvoer op het moment dat de GHG en GLG worden bereikt. Er wordt daarbij geen rekening gehouden met de effecten van een eventuele verdampingsreductie ten gevolge van de winning. Deze verdampingsreductie kan pas worden vastgesteld na doorrekening door de ACSG van de onverzadigde zone met gebruikmaken van de

berekende verlaging van GHG en GLG. Indien de uiteindelijke berekende verdampingsreductie substantieel is, bijvoorbeeld 10%, dan kan de berekening van de verlaging van de GHG en GLG nogmaals worden uitgevoerd met een permanente, constante onttrekking, die een tiental procenten lager is dan de werkelijke onttrekking. Daarna zal de ACSG opnieuw de berekening moeten uitvoeren ten aanzien van de verdampingsreductie.

De numerieke berekening van de verlaging van de GxG wordt tweemaal uitgevoerd. De eerste berekening betreft de verandering van de GHG. Als beginsituatie, dat is de situatie zonder onttrekking, wordt uitgegaan van de GHG voor elk schadevlak op het tijdstip juist voor de aanvang van de onttrekking. De permanente constante onttrekking wordt daarna in de berekening instantaan tot stand gebracht op het niveau van de eindonttrekking. In werkelijkheid wordt een onttrekking over een periode van vele jaren opgevoerd tot de eindonttrekking.

De stationaire eindsituatie wordt berekend met als resultaat de verandering van de grondwaterstand en de stijghoogte ten opzichte van de beginsituatie (nul-situatie). Uiteraard zullen deze veranderingen dichter bij de onttrekking groter zijn dan de veranderingen op verder gelegen locaties. Ook in hetzelfde schadevlak, waarbij werd uitgegaan van de nul-situatie (met overal de verlaging ten gevolge van de winning nihil; er is immers nog geen onttrekking), zal na de berekening de verandering door de onttrekking dus niet overal dezelfde zijn. Dit betekent dat na berekening van de verandering van de GHG voor het schadevlak een nieuwe gemiddelde GHG moet worden bepaald.

Voor de tweede berekening geldt dezelfde procedure, alleen is nu uiteraard de nul-situatie de GLG juist voor aanvang van de winning. In deze berekening wordt de verandering van de GLG vastgesteld onder invloed van de onttrekking.

Door in de berekening de onttrekking instantaan aan te brengen wordt in de meeste situaties een onderschatting van de verlaging verkregen. In werkelijkheid zal immers de onttrekking veelal in de loop van enkele decennia groeien tot de eindwaarde. In de publicatie "Tussen Dupuit en De Glee" in het blad Stromingen is reeds gewezen op het effect van de volgtijdelijkheid.

Gedurende de toename van de onttrekking tot de eindwaarde zullen andere invloeden kunnen leiden tot (meestal) een verlaging van de grondwaterstand en stijghoogte. Dit betekent dat in werkelijkheid, door het niet-lineaire gedrag van de U/h relatie, de verlaging ten gevolge van de onttrekking op het moment dat de eindwaarde wordt bereikt, groter zal zijn.

Ook zal het niet altijd eenvoudig zijn om de beginsituatie, vaak decennia geleden, te karakteriseren in termen van grondwatertrappen. Bodemkaarten uit de jaren '60 en '70 zijn een belangrijke gegevensbron, evenals de COLN-kartering uit de jaren '50, alhoewel deze vaak erg globaal is. Om het probleem van de beginsituatie het hoofd te bieden kan ook worden uitgegaan van de huidige situatie met betrekking tot de grondwatertrappen. Deze grondwatertrappen zijn vanaf het moment van het starten van de onttrekking beïnvloed door de huidige aanwezige constante grondwater onttrekking en ook door andere invloeden, die zijn opgetreden sinds de start van de winning. Door deze huidige situatie te definiëren als de nul-situatie kan het effect van de winning worden berekend door nu voor de onttrekking de negatieve waarde (dus eigenlijk een diep-infiltratie put) in de berekening op te nemen. De dan berekende stijging van grondwaterstand en stijghoogte geven nu echter een overschatting van het effect van de winning gedurende de periode dat er een winning is. Het is echter veel gemakkelijker om de huidige grondwatertrappenkaart te maken dan de grondwatertrappenkaart van decennia geleden. Ook andere gegevens, zoals de diepte van de van de drainagebases, zijn beter vast te stellen.

5. DE GEBIEDSSCHEMATISATIE

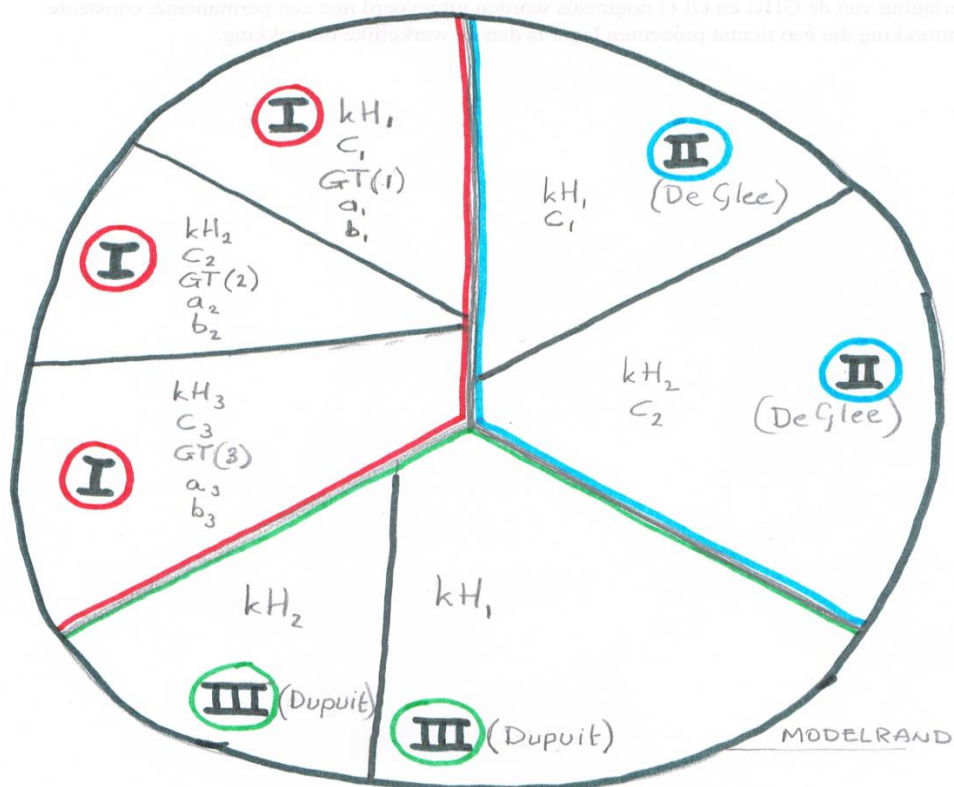
De implementatie van de analytische berekeningsmethode voor de bepaling van de verlagingen van de grondwaterstand in een numeriek regionaal model, betekent in de eerste plaats dat de differentiaalvergelijking uit de LTO nota met radiaal symmetrie (poolcoördinaten) moet worden omgezet naar een cartesisch stelsel (x-y coördinaten).

Deze omzetting heeft als resultaat dat een tweede orde, partiële differentiaal vergelijking wordt verkregen (zie bijlage met de fysisch/mathematische uitwerking). Deze vergelijking geldt voor gebieden (schadevlakken) die vrij afwaterend zijn en waarbij het verband tussen grondwaterstand en afvoer met een logaritmische relatie kan worden weergegeven.

Er kunnen in het te modelleren gebied ook schadevlakken voorkomen waar geen oppervlaktewater aanwezig is. Voor deze vlakken geldt de bekende Laplace vergelijking (Dupuit situatie). Hierbij is de verandering van de freatische grondwaterstand door een onttrekking gelijk aan de verandering van de stijghoogte.

Tenslotte is er de mogelijkheid dat er gebieden zijn waarbij mag worden aangenomen dat met peilbeheersing van het oppervlaktewatersysteem geen verlaging van het freatische vlak zal optreden, ook al verlaagt de grondwaterstijghoogte (De Glee situatie).

In figuur 3 zijn schematisch de drie mogelijkheden aangegeven met voor elke situatie de bijbehorende modelparameters.



FIGUUR 3

Indien wordt uitgegaan van een numeriek model gebaseerd op de eindige elementen methode of eindige differentiemethode (bijvoorbeeld Modflow) dan zullen de schadevlakken worden opgedeeld in een aantal elementen met dezelfde modelparameters.

De grootte van het modelgebied hangt af van een aantal factoren:

- grootte van de permanente onttrekking
- grootte van het gebied I ten opzichte van gebieden II en III
- spreidingslengte van gebied II
- wat zijn de GT's voordat de onttrekking in werking treedt, dus de niet beïnvloede situatie.

Voor een onttrekking van tien miljoen m³ per jaar is een modeloppervlak van 20 x 20 km² niet onwaarschijnlijk.

Geadviseerd wordt om voor de randvoorwaarde van het modelgebied te kiezen voor een Neuman randvoorwaarde, waarbij de randstroming in de situatie met onttrekking nihil is.

6. Vervolgstappen

Nadat de implementatie van de vergelijkingen in bijvoorbeeld Modflow heeft plaatsgevonden, kan locatie specifiek onderzoek plaatsvinden.

De benodigde modelparameters voor het betreffende modelgebied moeten worden bepaald met behulp van literatuuronderzoek, waarnemingen of meetprogramma's.

Ook de grootte van de permanente onttrekking dient uiteraard bekend te zijn.

Het numerieke rekenmodel dat daarmee voor een specifieke locatie ontstaat, levert de essentiële informatie met betrekking tot de grondwaterstand veranderingen (in termen van GHG en GLG) voor de ACSG om de verdampingsreducties en vervolgens de landbouwschade vast te stellen.

REFERENTIES

Akker, C. van den (2014) Tussen Dupuit en De Glee ; Stromingen jaargang 19 nummer 2

Akker, C. van den (2016) Analyse van de stationaire grondwaterstroming naar permanente putten in vrij afwaterende gebieden ; Nota van LTO Nederland

Bouwmans, J.M.M. (1990) Achtergrond en toepassing van de TCGB tabel ; TCGB

BIJLAGE IMPLEMENTATIE NOTA

Uitgangspunt is de tweede orde, gewone differentiaalvergelijking uit de LTO nota getiteld “Analyse van de stationaire grondwaterstroming naar permanente putten in vrij afwaterende gebieden”.

Deze differentiaalvergelijking beschrijft de stationaire stroming naar een volkomen put in een watervoerend pakket. Op het pakket ligt een afdekkende laag met daarin een drainage systeem.

Het geheel kan worden opgevat als een vrij afwaterend gebied met een gebiedsgemiddelde grondwaterstand en een oppervlaktewater afvoer per oppervlakte eenheid.

Deze differentiaalvergelijking is:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \left\{ \frac{\varphi - m_v - b - a W\left\{-\frac{1}{a} \exp((\varphi - C1)/a)\right\}}{\lambda^2} \right\} = 0$$

waarin:

φ = verandering van de stijghoogte ten gevolge van de onttrekking

r = poolcoördinaat

$\lambda = \sqrt{kHc}$

$W(x)$ = Lambert functie

Aannames:

- Horizontale stroming in het watervoerende pakket
- Verticale stroming in de afdekkende laag
- Homogene bodemopbouw
- k , H en c zijn constant

De bovenstaande differentiaalvergelijking geldt voor radiaal symmetrische stromingsgevallen. In een regionaal numeriek model wordt gerekend met cartesische coördinaten (x , y) en dus moet de differentiaalvergelijking worden omgewerkt van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

De Laplace vergelijking is in termen van cartesische coördinaten:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

In termen van poolcoördinaten is de Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

Bij radiaalsymmetrie is:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$$

Dus geldt voor de Laplace vergelijking in termen van poolcoördinaten:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

Dit betekent dat de vergelijking uit de LTO nota nu kan worden geschreven in termen van cartesische coördinaten als een partiële tweede orde differentiaalvergelijking:

$$kH \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kH \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\varphi - m_v - b - a W \left\{ -\frac{1}{a} \exp\left(\frac{\varphi - C_1}{a}\right) \right\}}{c} \right\} = 0$$

waarin

$$C_1 = \varphi - h + m_v + b - a \ln(-h + m_v + b)$$

We berekenen de verandering van de stijghoogte en de freatische grondwaterstand ten gevolge van de onttrekking. Voordat de onttrekking plaatsvindt is de verandering van stijghoogte en grondwaterstand gelijk aan nul.

Dit betekent dat:

$$h_0 = \varphi_0 = 0$$

Hieruit volgt dat:

$$C_1 = m_v + b - a \ln(m_v + b)$$

Daarmee wordt de partiële differentiaalvergelijking:

$$kH \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kH \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\varphi - m_v - b - a W \left\{ -\frac{1}{a} \exp\left(\frac{\varphi - m_v - b + a \ln(m_v + b)}{a}\right) \right\}}{c} \right\} = 0$$

waarbij $a < 0$ en $b \leq 0$

In het modelgebied zijn dus per knooppunt 3 mogelijke voedingstermen ter compensatie van de grondwater onttrekking:

I Vrij afwaterend gebied:

$$q_z = - \left\{ \frac{\varphi - m_v - b - a W \left\{ -\frac{1}{a} \exp\left(\frac{\varphi - m_v - b + a \ln(m_v + b)}{a}\right) \right\}}{c} \right\}$$

waarin
$$a = \frac{cj}{2} * \frac{1}{W\left\{\frac{cj}{2} * \frac{1}{(h_d - m_v - b)}\right\}}$$

waarbij $q_z = \text{maximaal}$ zodra de drainagebasis $h_d - m_v$ wordt bereikt.

De maximale q_z kan worden berekend met de vergelijking van de U/h relatie :

$$U = \frac{1}{2}j + \frac{a}{c} \left\{ \ln\left(\frac{-h + m_v + b}{-a}\right) \right\}$$

In de nul-situatie is $h = h_0 = 0$ en dus is:

$$q_{max} = \frac{1}{2}j + \frac{a}{c} \left\{ \ln\left(\frac{m_v + b}{-a}\right) \right\}$$

II Oppervlakte water met een vast peil waarbij $h_0 = 0$ (De Glee)

$$q_z = \frac{\varphi}{c}$$

III Geen oppervlaktewater (Dupuit)

$$q_z = 0$$

Voorbeeld berekening q_z voor gebieden met vrije afwatering.

Voor de start van de onttrekking geldt dat $h_0 = \varphi_0 = 0$

In een knooppunt dat deel uitmaakt van het gebied met vrije afwatering is de nul-situatie ten aanzien van de grondwatertrap bekend.

Stel dat dit knooppunt in het schadevlak met GT VI ligt.

Bij GT VI geldt (zie Van der Sluijs tabel op blz. 6 van de nota):

GLG=1,55 m.

Hieruit volgt dat $h_0 - m_v = -1,55 \text{ m.} \rightarrow m_v = 1,55 \text{ m.}$

Stel dat voor de drainage basis geldt $h_d - m_v = -2 \text{ m.}$

Stel dat de hydraulische weerstand van de afdekkende laag $c = 100 \text{ dagen.}$

Eveneens is bekend dat $b = -0,25 \text{ m}$ (gebruikelijk in landbouwpublicaties)

Stel $j = 5 \text{ mm/dag}$

De waarde van a kan worden berekend met:

$$a = \frac{cj}{2} * \frac{1}{W\left\{\frac{cj}{2} * \frac{1}{(h_d - m_v - b)}\right\}}$$

met als resultaat $a = -0,0815 \text{ m.}$

Substitutie van de berekende waarden in de vergelijking voor q_z geeft:

$$q_z = - \left\{ \frac{\varphi - 1,3 + 0,0815 W \left\{ \frac{1}{0,0815} \exp[(\varphi - 1,32138)/-0,0815] \right\}}{100} \right\}$$

In het stelsel vergelijkingen is nu de grondwaterstijghoogte de enige variabele en kan met een directe of indirecte methode worden opgelost.

De maximale waarde q_{max} van de q_z is gelijk aan:

$$q_{max} = \frac{1}{2}j + \frac{a}{c} \left\{ \ln \left(\frac{m_v + b}{-a} \right) \right\}$$

Dus:

$$q_{max} = \frac{1}{2} * 5 * 10^{-3} + \frac{-0,0815}{100} \ln \left\{ \frac{1,55 - 0,25}{0,0815} \right\} = 0,243 * 10^{-3} \text{ m/dag}$$

Daarna wordt de grondwaterstand berekend met behulp van de vergelijking:

$$h = m_v + b + a W \left\{ -\frac{1}{a} \exp[(\varphi - m_v - b + a \ln(m_v + b))/a] \right\}$$

